***Лекция 2***

**ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА**

**Кинетический момент точки и системы относительно центра и оси**

 Рассмотрим систему материальных точек с массами m1m2....mn, имеющих в данный момент скорости **V1V2.....Vn**  относительно инерциальной системы отсчета. Выберем произвольный центр О (Рис.1). ***Кинетическим моментом*** точки mjотносительно центра О называется векторная величина, равная моменту ее количества движения относительно этого центра.

**Koj=mo(qj)=rj×**mj**Vj** (j=1,2...n) (1)



Известно, что векторное умножение можно записать через присоединенную матрицу первого сомножителя радиуса вектора **r.**

Опуская индекс j, запишем матричное выражение в осях xyz c началом в О:

*K*o=m*Rv* (2)

где *R-* кососимметричная присоединенная матрица столбца *r*

$\left(\begin{matrix}K\_{x}\\K\_{y}\\K\_{z}\end{matrix}\right)=m\left(\begin{matrix}0&-z&y\\z&0&-x\\-y&x&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{matrix}\right)=m\left(\begin{matrix}y\dot{z}-z\dot{y}\\z\dot{x}-x\dot{z}\\x\dot{y}-y\dot{x}\end{matrix}\right) $ (3)

Проекция кинетического момента на ось называются ***кинетическим моментом точки относительно оси***. Он вычисляется либо аналитически по формулам (3), либо как момент силы относительно оси. Момент дает только касательная составляющая вектора **q** (Рис.2).



KZ= +qh (4)

Момент обращается в ноль, если вектор количества движения (скорость точки) лежит в одной плоскости с осью (параллелен или пересекает ось)

***Кинетическим моментом системы*** относительно центра О называется главный момент количеств движений точек системы относительно этого центра.

**Ko=Koj=**mj**rj×vj** (5)

Аналогично с формулой (3) проекции вектора (4) образуют столбец кинетических моментов относительно осей координат

$\left(\begin{matrix}K\_{x}\\K\_{y}\\K\_{z}\end{matrix}\right)=\sum\_{}^{}m\_{j}\left(\begin{matrix}y\_{j}\dot{z}\_{j}-z\_{j}\dot{y}\_{j}\\z\_{j}\dot{x}\_{j} -x\_{j}\dot{z}\_{j}\\x\_{j}\dot{y}\_{j}-y\_{j}\dot{x}\_{j}\end{matrix}\right) $ (6)

Найдем связь между кинетическими моментами системы относительно двух неподвижных центров А и В. Обозначим через **rА**j , **rB**j радиусы векторы точки mj системы относительно центров А и В соответственно. Очевидно, что

А

В

mj

**v**j

**rA**j

**rB**j

**rA**j=**АВ+ rB**j

Тогда

**KA =**mj**rAj×Vj** **=**mj [(**АВ+ rB**j **)×Vj**] = **АВ×**mj **Vj + **mj**rBj×Vj**

Окончательно

**KA= KВ+ АВ×**М**vc** или **KA= KВ+ АВ×Q**

Формула напоминает зависимость главного момента системы сил от центра. Видим, что при неподвижном центре масс тела (например сферическое движение вокруг С или вращение тела вокруг центральной оси) кинетический момент не зависит от центра.

**vC=0 : KA= KВ = KC=K**

**Кинетический момент системы в сложном движении**

Наряду с инерциальной системой отсчета с осями xyz введем поступательно движущиеся С координаты с началом в центре масс С (Рис.3). Теперь движение каждой точки можно представить как сложное. Скорость точки будет складываться из переносной скорости, равной для всех точек скорости центра масс С и относительной скорости **vjr**



**Vj=VC+Vjr** (7)

Кроме того, из рисунка видно, что

**rj=rC+j** (8)

Теперь

**Ko= **mj(**rC+j)×(VC+Vrj)=**

**rC×VC **mj+ **rC×**mj**Vrj+(**mj**j)×VC+**mj**j×Vrj** (9)

Здесь второе и третье слагаемые равны нулю поскольку по определению центра масс

mjj=MC=0 mjvrj=d/dtmjj=0 (10)

Последнее слагаемое логично назвать относительным кинетическим моментом системы

**KC= **mj**j×Vrj** (11)

Теперь

**KO= KC+ rC×**M**VC** (12)

Заметим, что в отличие от похожей формулы, связывающей кинетические моменты относительно неподвижных центров, здесь С произвольно движется и в **Кс** входят относительные скорости точек. Вывод формулы показывает, что такая простая формула (12) справедлива только для центра масс, что подчеркивает значение этого центра в динамике.

**Теорема об изменении кинетического момента системы.**

Дифференцируя (5) по времени находим

d**KO**/dt**=**mj(**Vj×Vj +rj×Wj)= rj×**mj**Wj=**

**[rj×(Fej+Fij)]=mO(Fej)+mO(Fij)=MeO+MiO=MeO** (13)

Здесь учтено, что векторное произведение вектора на себя и главный момент внутренних сил равны нулю. Таким образом, приходим к ***теореме* *об изменении кинетического момента***

d**KO**/dt=**MeO** (14)

относительно неподвижного центра. В проекциях на оси xyz c началом в О теорема имеет вид

dKx/dt=Mex=mx(Fej)

dKy/dt=Mey=my(Fej) (15)

dKz/dt=Mez=mz(Fej)

Подставим теперь выражение (12) в формулу (14). После дифференцирования получим

d**KС** /dt+ **vC×**M**vC+rC×**M**wC**=**MeO** (16)

C учетом того, что **vC×**M**vC=0,**  М**WC=Ve**  и теоремы о зависимости главного момента от центра получаем

d**KС** /dt= **MeOrC×Ve= MeO+CO×Ve=MeC** (17)

Доказанная ***теорема об изменении относительного кинетического момента***

d**KС** /dt= **MeC** (18)

имеет тот же вид, что и в инерциальной системе.

 В проекциях

dKxC /dt= mxC (Fej)

dKyC /dt= myC (Fej) (19)

dKzC /dt= mzC (Fej)

***Следствия***

1. Внутренние силы не изменяют кинетического момента непосредственно. Однако, как и в теореме о движении цента масс, они могут вызвать внешние силы, изменяющие кинетический момент.
2. Если **MeO**=0, то **KO=Const** векторно. Так для Солнечной системы, которую можно считать изолированной от внешнего влияния удаленных галактик, вектор кинетического момента сохраняет свое направление и модуль. Перпендикулярная ему плоскость, называемая ***плоскостью Лапласа***, тоже сохраняет свое положение по отношению к гелиоцентрической инерциальной системе отсчета.



1. Если, в частном случае только Мz=0, то сохраняется соответствующая проекция кинетического момента Кz=Сonst. Так кинетический момент конического маятника относительно вертикальной оси не будет изменяться с течением времени, поскольку Мz=0. Значит, во время движения произведение mV h будет постоянным, т.е.



**ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Динамика твердого тела полностью описывается двумя общими теоремами, которые мы изучили: теоремой о движении центра масс и теоремой об изменении кинетического момента.

**Кинетический момент тела в сферическом движении.**

**Матрица инерции**

 Рассмотрим твердое тело, совершающее сферическое движение вокруг неподвижной точки О. (Рис.1). Кинетический момент тела вычислим по формуле

dm

**r**

****

s

 **Kо= [r×(× r)]**dm **=   [r×( r×)]**dm (1)

 Поскольку тело сплошное, то в выражении **KC** сумму следует заменить интегралом по объему тела, а массу точки- элементарной массой dm. Относительную скорость точки найдем как скорость точки тела, вращающегося вокруг центра масс С, по формуле Эйлера **Vr=× r.** Получаем

Представим формулу (1) в матричной форме, записав векторное произведение через присоединенную кососимметричную матрицу *R* радиус- вектора **r**

*Kо=( R2dm) *(2)

т.к. **r×(r× >** *R (R=R2 R*

 Величина в скобках в (2) является матрицей 3x3, и называется ***матрицей*** ***инерции*** *J****С*** в центре С- осях.

*Jo*= *R*2dm (3)

***Осевые и центробежные моменты инерции***

 Вычислим матрицу инерции в соответствии с формулой (3).

*R2=*= (6)

Интеграл от матрицы представляет собой матрицу интегралов ее элементов, поэтому

*Jo=* (7)

Видим, что матрица *Jo* симметрична (xydm=yxdm и т.д.) и, значит, имеет только шесть различных элементов. Диагональные элементы называются ***моментами инерции тела относительно осей x, y*** и ***z***

Jx= (y2+z2)dm Jy= (z2+x2)dm Jz= (x2+y2)dm (8)

 Остальные три интеграла называются- ***центробежными моментами инерции***

Jxy=Jyx =xydm Jyz= Jyz =yzdm Jzx= Jxz=zxdm (9)

Размерность всех моментов инерции [J]=кг м2.

 В принятых обозначениях матрица инерции приобретает вид

*JO*= (10)

 Рассмотрим основные свойства моментов инерции, (другие свойства будут рассмотрены в специальной главе).

*Осевые моменты инерции*

 Заметим, что под знаками интеграла здесь стоят квадраты расстояний h от точки dm до соответствующей оси. Так y2+z2=hx2. Поэтому момент инерции тела относительно произвольной оси L будет равен

JL= hL2dm (11)

где hL- расстояние текущей точки до оси.

Видим, что осевой момент не может быть отрицательным или равным нулю, и характеризует удаленность масс тела от оси. Например, момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню, будет больше, чем относительно наклонной оси (Рис.2) поскольку x>h для любой точки стержня.



Jz>Jz’

 Покажем, как практически вычисляется осевой момент инерции относительно оси z для однородного стержня массы М= γL (γ- погонная плотность, L- длина стержня). инерции стержня.

Jz= к*u* м2 (12)

Выражения моментов инерции тел правильной формы относительно некоторых осей можно найти в справочниках.

*Центробежные моменты инерции*.

 В отличие от осевых моментов инерции, центробежные моменты инерции

Jxy=Jyx =xydm Jyz= Jyz =yzdm Jzx= Jxz=zxdm

могут быть отрицательными или равными нулю.

Ось называется ***главной осью инерции в точке О***, если оба центробежные момента с ее индексом равны нулю. Так ось z будет главной в О, если

Jzx=Jyz=0 (13)

 В дальнейшем будет показано, что в любой точке пространства для данного тела существует три взаимно перпендикулярных главных оси инерции XYZ, в которых матрица инерции будет диагональной.

*JO*= (14)